ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

HÀ TRƯỜNG GIANG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT DẠNG $(x^2 \pm C)(y^2 \pm D) = z^4$

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

HÀ TRƯỜNG GIANG

VỀ PHƯƠNG TRÌNH DIOPHANT DẠNG $(x^2 \pm C)(y^2 \pm D) = z^4$

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

GIÁO VIÊN HƯỚNG DẪN
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tỉ mỉ và tận tình của thầy giáo TS. Ngô Văn Định. Em xin bày tỏ lòng kính trọng và biết ơn sâu sắc đến Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu tại trường Đại học Khoa học – Đại học Thái Nguyên tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ và động viên của các thầy cô trong Ban Giám hiệu, phòng Đào tạo và khoa Toán – Tin. Em xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy cô.

Cuối cùng tác giả xin cảm ơn gia đình, bạn bè, các anh chị học viên lớp Cao học Toán K11A đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong quá trình học tập và làm luận văn tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2019

Tác giả luận văn

Hà Trường Giang

Mở đầu

Số học là một bộ môn toán học có đối tượng nghiên cứu là các số nguyên. Không có gì đơn giản và quen thuộc hơn đối với chúng ta là các số nguyên. Ngày nay, với sự phát triển của khoa học và công nghệ, đặc biệt là công nghệ số hóa, đã đòi hỏi con người không ngừng nghiên cứu và khám phá các quy luật, các thuật giải cho các bài toán liên quan tới số nguyên. Bao hàm trong mảng số học, là giải phương trình nghiệm nguyên hay còn gọi là phương trình Diophant. Lớp phương trình này còn tồn tại nhiều bài toán, giả thuyết chưa có câu trả lời. Nó luôn là vấn đề thu hút được nhiều nhà Toán học quan tâm nghiên cứu và tìm hiểu. Chính việc đi tìm lời giải cho các bài toán hay chứng minh các giả thuyết về phương trình Diophant đã làm nảy sinh nhiều lý thuyết, phương pháp khác của Toán học. Lớp bài toán liên quan tới phương trình Diophant không có quy tắc giải tổng quát, hoặc nếu có cũng chỉ là đối với các dạng đơn giản. Đó cũng là nguyên nhân để lớp phương trình này thu hút sự khám phá nghiên cứu của các nhà Toán học. Trong hầu hết các kỳ thi quan trọng như thi học sinh giỏi Toán quốc gia, Quốc tế,... các bài toán liên quan đến phương trình Diophant thường xuyên được sử dụng để đánh giá học sinh.

Do đó, dưới sự hướng dẫn khoa học của TS. Ngô Văn Định, tôi đã chọn hướng đề tài luận văn của mình liên quan tới một lớp phương trình Diophant. Cụ thể là nghiên cứu về tính chất nghiệm của phương trình Diophant dạng

$$(x^2 \pm C)(y^2 \pm D) = z^4,$$

trong đó $C, D \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

Với tên đề tài "Về phương trình Diophant dạng $(x^2 \pm C)(y^2 \pm D) = z^4$", mục đích của luận văn là trình bày lại một số kết quả nghiên cứu của Luca và Walsh [6] được công bố trên tạp chí Acta Arithmetica năm 2001 và một số kết quả của Yuan và Luo [10] được công bố trên tạp chí Acta Arithmetica năm 2010. Công cụ quan trọng trong các chứng minh của các kết quả này là sử dụng các kết quả đã có về nghiệm của phương trình Diophant dạng

$$ax^2 - by^4 = c,$$

với $c \in \{\pm 1. \pm 2, \pm 4\}$.

Nội dung luận văn gồm 2 chương. Chương 1 tập trung trình bày một số kết quả chuẩn bị, đặc biệt giới thiệu sơ lược một số kết quả về phương trình Diophant dạng $ax^2 - by^4 = c$ sẽ được dùng trong chứng minh các nội dung chính của chương sau. Chương 2 trình bày lại các kết quả quan trọng của Luca và Walsh, của Yuan và Luo về tính chất nghiệm của phương trình Diophant dạng $(x^2 \pm C)(y^2 \pm D) = z^4$, với $C, D \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Trong chương đầu tiên này, chúng tôi trình bày sơ lược lại một số kiến thức chuẩn bị sẽ được sử dụng trong chương sau, đặc biệt là một số kết quả về các phương trình Diophant dạng $ax^2 - by^4 = c$, với $c \in \{\pm 2, \pm 4\}$.

1.1 Phương trình Diophant dạng $ax^2 - by^4 = \pm 2$

Giả sử a, b là số nguyên dương lẻ sao cho phương trình Diophant:

$$aX^2 - bY^2 = 2 \tag{1.1}$$

có nghiệm nguyên dương (X, Y). Giả sử (a_1, b_1) là nghiệm nguyên dương bé nhất của phương trình (1.1). Đặt

$$\alpha = \frac{a_1\sqrt{a} + b_1\sqrt{b}}{\sqrt{2}}. \tag{1.2}$$

Khi đó, với k là số nguyên dương lẻ, ta có:

$$\alpha^k = \frac{a_k\sqrt{a} + b_k\sqrt{b}}{\sqrt{2}}, \tag{1.3}$$

trong đó (a_k, b_k) là các số nguyên dương. Đặc biệt người ta đã chỉ ra được rằng tất cả các nghiệm nguyên dương (X, Y) của phương trình (1.1) đều có dạng (a_k, b_k).

Với mệnh đề dưới đây, Luca và Walsh đã cho lời giải đầy đủ của phương trình Diophant dạng:

$$ax^2 - by^4 = 2. \tag{1.4}$$

Mệnh đề 1.1.1 ([6, Định lý 2]). *(i) Nếu b_1 không là số chính phương thì phương trình (1.4) không có nghiệm.*

(ii) Nếu b_1 là một số chính phương và b_3 không là số chính phương thì $(X, Y) = (a_1, \sqrt{b_1})$ là nghiệm duy nhất của phương trình (1.4).

(iii) Nếu b_1 và b_3 cùng là số chính phương thì $(X, Y) = (a_1, \sqrt{b_1}), (a_3, \sqrt{b_3})$ là các nghiệm của phương trình (1.4).

Sử dụng phương pháp của Luca và Walsh, Yuan và Li [9] đã chứng minh giả thuyết của Akhtari, Togbe và Walsh đối với phương trình dạng $aX^2 - bY^4 = -2$. Cụ thể, ta có mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1.1.2 ([9]). *Cho các số nguyên dương lẻ bất kỳ a, b, phương trình $ax^2 - by^4 = -2$ có nhiều nhất là một nghiệm nguyên dương và nghiệm này được xây dựng từ nghiệm nhỏ nhất của phương trình bậc hai $ax^2 - by^2 = -2$.*

1.2 Phương trình Diophant dạng $ax^2 - by^4 = \pm 4$

Giả sử A và B là các số nguyên dương lẻ sao cho phương trình Diophant:

$$Ax^2 - By^2 = 4 \tag{1.5}$$

có nghiệm nguyên dương lẻ x, y. Giả sử (a_1, b_1) là nghiệm nguyên dương nhỏ nhất. Đặt

$$\frac{a_n\sqrt{A} + b_n\sqrt{B}}{2} = (\frac{a_1\sqrt{A} + b_1\sqrt{B}}{2})^n. \tag{1.6}$$

Với giả thiết này, Ljunggren đã chứng minh kết quả sau đây về phương trình dạng $Ax^4 - By^2 = 4$ bằng cách tính toán kí hiệu Jacobi của dãy Lehmer liên quan.

Mệnh đề 1.2.1 ([5, Định lý 1]). *Phương trình Diophant dạng $Ax^4 - By^2 = 4$ có nhiều nhất là hai nghiệm nguyên dương x, y. Cụ thể:*

(i) Nếu $a_1 = h^2$ và $Aa_1^2 - 3 = k^2$ thì phương trình (1.5) chỉ có hai nghiệm $x = \sqrt{a_1} = h$ và $x = \sqrt{a_3} = hk$.

(ii) Nếu $a_1 = h^2$ *và* $Aa_1^2 - 3 \neq k^2$ *thì* $x = \sqrt{a_1} = h$ *là nghiệm duy nhất của phương trình (1.5).*

(iii) Nếu $a_1 = 5h^2$ *và* $A^2a_1^4 - 5Aa_1^2 + 5 = 5k^2$ *thì phương trình (1.5) có nghiệm duy nhất là* $x = \sqrt{a_5} = 5hk$*.*

Trong các trường hợp còn lại, phương trình (1.5) không có nghiệm.

Đối với phương trình dạng $Ax^4 - By^2 = -4$, ta có mệnh đề sau đây được chứng minh bởi Luo và Yuan.

Mệnh đề 1.2.2 ([7])**.** *(i) Nếu* b_1 *không là số chính phương thì phương trình:*

$$Ax^2 - By^4 = 4. \tag{1.7}$$

không có ngiệm nguyên dương ngoại trừ trường hợp $b_1 = 3h^2$ *và* $Bb_1^2 + 3 = 3k^2$*, trong trường hợp đó* $y = \sqrt{b_3}$ *là nghiệm duy nhất của phương trình (1.7).*

(ii) Nếu b_1 *là số chính phương thì phương trình (1.7) có nhiều nhất một nghiệm nguyên dương mà* $y = \sqrt{b_1}$*. Nghiệm đó xác định bởi* $y = \sqrt{b_3}$ *hoặc* $y = \sqrt{b_2}$*, trong đó trường hợp sau xảy ra khi và chỉ khi* a_1 *và* b_1 *cùng là số chính phương,* $A = 1$ *và* $B \neq 5$*.*

1.3 Dãy Lehmer và một số kết quả liên quan

Trong phần này, chúng tôi sẽ giới thiệu một số kết quả sẽ được sử dụng trong chương sau của luận văn. Đặc biệt, chúng tôi sẽ nhắc lại một số kết quả có liên quan đến các dãy số Lehmer. Trước tiên, ta nhắc lại kết quả sau đây của Walsh.

Mệnh đề 1.3.1 ([8, Định lý 2.1.1])**.** *Giả sử* $D \neq 2$ *là một số nguyên dương không chính phương với* $8 \nmid D$*.*

(i) Nếu $2 \mid D$ *thì có một và chỉ một phương trình dạng*

$$kx^2 - ly^2 = 1$$

có các nghiệm nguyên, trong đó (k, l) chạy trên tất cả các cặp số nguyên sao cho $k > 1, kl = D$.

(ii) Nếu $2 \nmid D$ thì có một và chỉ một phương trình dạng

$$kx^2 - ly^2 = 1, kx^2 - ly^2 = 2$$

có nghiệm nguyên, trong đó (k, l) của phương trình thứ nhất chạy trên tất cả các cặp số nguyên sao cho $k > 1, kl = D$, còn (k, l) trong phương trình sau chạy trên tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $k > 0, kl = D$.

(iii) Nếu $2 \nmid D$ và phương trình Diophant $x^2 - Dy^2 = 4$ có nghiệm nguyên lẻ x và y thì có một và chỉ một phương trình dạng

$$kx^2 - ly^2 = 4$$

có nghiệm nguyên, trong đó (k, l) chạy trên tất cả các cặp số nguyên sao cho $k > 1, kl = D$.

Từ Mệnh đề 1.3.1, ta có ngay hệ quả trực tiếp sau đây:

Hệ quả 1.3.2 ([10, Bổ đề 3.2])**.**

(i) Giả sử $k > 1$ và l là các số nguyên dương lẻ sao cho $kx^2 - ly^2 = 4, 2 \nmid xy$ có nghiệm nguyên dương. Khi đó phương trình $kx^2 - ly^2 = 1$ có nghiệm nguyên dương.

(ii) Giả sử D là một số nguyên dương thỏa mãn $x^2 - Dy^2 = 4, 2 \nmid xy$ là giải được. Khi đó có một và chỉ một phương trình dạng

$$kx^2 - ly^2 = 1$$

có nghiệm nguyên, trong đó (k, l) chạy trên tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn $k > 1, kl = D$.

Giả sử $L > 0$ và M là hai số nguyên nguyên tố cùng nhau thỏa mãn $L - 4M > 0$. Gọi α và β là hai nghiệm của tam thức bậc hai $x^2 - \sqrt{L}x + M$. Khi đó *dãy Lehmer* $\{P_n\}$ và *dãy Lehmer liên kết* $\{Q_n\}$ được định nghĩa bởi

$$P_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, & \text{nếu } n \text{ là lẻ,} \\ \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^2 - \beta^2}, & \text{nếu } n \text{ là chẵn,} \end{cases}$$